空間モデルの解析手法

大槻 久

February 6th, 2025

総研大・統合進化科学研究センター

概要

- ネットワーク上の感染症動態
- ネットワーク上の進化ゲーム

ネットワーク上の感染症動態

SIS モデル

SIS モデル

各個体は未感染状態（S: Suscptible）と感染状態（I: Infected）のいずれかを取り、以下の状態遷移が起こる。

$$
\begin{aligned}
S + I &\xrightarrow{\lambda} I + I && \text{（感染）} \\
I &\xrightarrow{1} S && \text{（回復）}
\end{aligned}
$$

完全混合集団：

$$
\begin{cases}
\dot{S} = -\lambda S I + I \\
\dot{I} = \underbrace{\lambda S I}_{\text{感染}} - \underbrace{I}_{\text{回復}}
\end{cases}
$$

以下、$S + I = 1$ と正規化しておく。

閾値定理

閾値定理

全員が S である集団にわずかに導入された感染症は、

- $\lambda > 1$ ならば集団に<u>広まる</u>（=初期侵入する）。
- $\lambda < 1$ ならば集団に<u>広まらない</u>（=初期侵入に失敗する）。

すなわち流行拡大の λ の閾値は、$\lambda^* = 1$ である。

【簡単な証明】I の方程式は

$$\dot{I} = (\lambda S - 1)I$$

と書け、S の初期値は 1 だから、$\lambda S - 1 = \lambda - 1$ の符号で感染症の初期侵入可能性が決まる。 $\square$

ネットワーク上の感染症

実際の宿主集団はしばしば空間構造を持つ。
そこで以下の仮定を置いたネットワーク上の感染動態モデルを考える。

- 各個人はネットワークの頂点に配置されているとする。
- 感染はネットワークの辺を通じてのみ起こる。

コンタクトプロセス (contact process)

上の仮定からなる空間モデルをコンタクトプロセスと呼ぶ。

ネットワーク上の感染症

さらに具体的に以下の仮定を置く。

感染 各辺は rate λ で選択される。
選択された辺が S-I であれば感染が起こる。

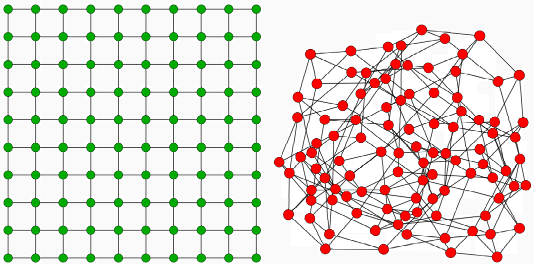
回復 各頂点は rate 1 で選択される。
選択された頂点が I であれば回復が起こる。

次数と正則グラフ

各頂点がつながる辺の数を、その頂点の次数 (degree) と呼ぶ。

すべての頂点の次数が等しいグラフを正則グラフ (regular graph) と呼ぶ。

次数 k の正則グラフ上で感染症はどのように起こるか？



正方格子（左）と
ランダム正則グラフ（右）

正則グラフ上の感染症動態

【感染】

ある S 頂点に注目する。この S 頂点につながった辺のどれかが選ばれる rate は $k\lambda$ である。

S 頂点につながった先の頂点の状態が I である確率を $P(\mathrm{I}|\mathrm{S})$ とすると、S 頂点が感染する rate は $k\lambda \cdot P(\mathrm{I}|\mathrm{S})$ と書ける。

$$\Delta I = k\lambda \cdot P(\mathrm{I}|\mathrm{S}) \cdot S$$

ここで二頂点間の状態の相関を無視すると、$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}) = I$ である*。
これを平均場近似 (mean-field approximation) と呼ぶ。

*隣が S であることはまだ感染症が近くに来ていないことを意味するから、$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}) < I$ が期待されるかもしれない。このような影響を無視する。

正則グラフ上の感染症動態

ある I 頂点が選ばれる rate は 1 であり、この rate で回復が起こる。よって前の議論と合わせて以下を得る。

次数 k の正則グラフ上の SIS モデル

$$\dot{I} = k\lambda SI - I$$

これは、先程のモデルで感染率 λ が $k\lambda$ に置き換わったモデルだから、$k\lambda \gtrless 1$ が感染拡大の有無を決定する。言い換えれば閾値は

$$\lambda^* = \frac{1}{k}$$

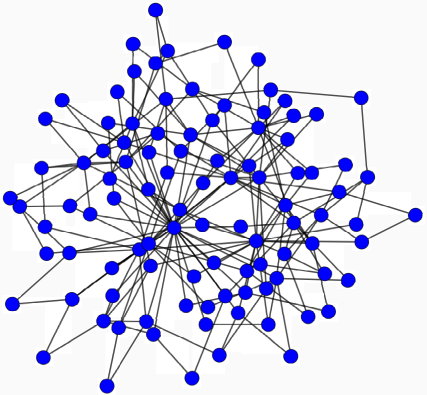
である。

次数分布のあるネットワーク

実際のネットワークは正則でないことが多い。

次数 k の頂点の比率が $\phi(k)$ であるネットワークを考える（$\sum_k \phi(k) = 1$）。

次数 k の頂点全体に占める、S 頂点、I 頂点の割合を S_k、I_k とおく（$S_k + I_k = 1$）。



Barabási-Albert 型スケールフリーネットワーク

次数分布のあるネットワーク上の感染症動態

【感染】

ある S_k 頂点（＝状態が S で次数が k である頂点）に注目する。
この S_k 頂点につながった辺のどれかが選ばれる rate は $k\lambda$ である。

S_k 頂点につながった先の頂点の状態が I（つまり $\mathsf{I}_1, \mathsf{I}_2, \cdots$ のどれか）である確率を $P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k)$ とすると、S_k 頂点が感染する rate は $k\lambda \cdot P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k)$ と書ける。

$$\Delta I_k = k\lambda \cdot P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k) \cdot S_k$$

$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k)$ の計算

相手先の次数を k' とする。隣接頂点間の相関を無視する平均場近似を採用する。
次数分布が $\phi(k')$ であるから、$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k) = \sum_{k'} \phi(k') I_{k'}$ だろうか？？

否。次数 k' の頂点は k' 本の辺を持つから、次数 k' の頂点へのつながりやすさは $k'\phi(k')$ に比例する。

よって

$$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k) = \sum_{k'} \underbrace{\frac{k'\phi(k')}{\sum_{\ell'} \ell'\phi(\ell')}}_{\text{（規格化）}} I_{k'} = \sum_{k'} \frac{k'\phi(k')}{\langle k \rangle} I_{k'} \qquad (= \Theta \text{とおく})$$

が正しい（$\langle k \rangle$ はネットワークの平均次数）。回復も考えて SIS モデルは

$$\dot{I}_k = k\lambda S_k \Theta - I_k$$

となる。

局所安定性解析

$$\dot{I}_k = k\lambda S_k \Theta - I_k \qquad (1 \le k \le N)$$

$(I_1, \cdots, I_N) = (0, \cdots, 0)$ での Jacobian は $\lambda A - E_N$。

ただし E_N は N 次単位行列、A は

$$A = \frac{1}{\langle k \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(1) & 2\phi(2) & \cdots & N\phi(N) \end{pmatrix} \qquad \left(a_{kk'} = \frac{kk'\phi(k')}{\langle k \rangle} \right)$$

なる N 次正方行列（$\mathrm{rank} A = 1$ である）。

次数分布のあるネットワーク上の感染症動態

A の実部最大の固有値は $\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$ と分かる。ただし $\langle k^2 \rangle$ は「次数の二乗」の平均。

Jacobian $\lambda A - E_N$ の最大固有値は $\lambda \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1$ と分かる。

$\lambda \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \gtrless 1$ が感染拡大の有無を決定するので、以下の結論を得る。

次数分布のあるネットワークの流行閾値

$$\lambda^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

局所安定性解析

演習

前ページの結果を以下の順番で示せ。

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$ が A の（各成分が正の）右固有ベクトルであることを示せ。
2. 1. の固有値を ρ とするとき、正行列に対する Perron-Frobenius の定理から、ρ は A の実部最大の固有値であることを導け。
3. A の固有値を重複を含めて $\rho_1, \cdots, \rho_N$ とする時、$\lambda A - E_N$ の固有値は重複を含めて $\lambda\rho_1 - 1, \cdots, \lambda\rho_N - 1$ であることを示せ。

閾値の例

次数 k の正則グラフ

$$\lambda^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

次数平均 k、次数分散 σ^2 のネットワーク

$$\lambda^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k \rangle^2 + \sigma^2}$$

スケールフリーネットワーク（$\phi(k) \sim k^{-\gamma},\ 2 < \gamma \leq 3$）

$$\lambda^* = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \frac{\sum_k k^{-\gamma+1}}{\sum_k k^{-\gamma+2}} = \frac{（\text{有限値}）}{+\infty} = 0$$

- 次数のばらつきがあればあるほど感染症は広まりやすい
- スケールフリーネットワークでは感染症は無条件に広がる（！）

次数相関

実際のネットワークでは、隣接頂点の次数に相関があることが多い。
例）友人が多い人の友人は、やはり友人が多い。

この場合、次数 k に隣接する頂点の次数 k' の分布はもはや

$$\sum_{k'} \frac{k'\phi(k')}{\langle k \rangle}$$

とは書けず、一般に k に依存するようになる。

次数相関

そこで頂点間の次数相関を考えることにする。
特に次数 k の頂点に隣接する頂点が次数 k' である確率を $P(k'|k)$ とおく
（先程は $P(k'|k) = k'\phi(k')/\langle k \rangle$ であった）。

この下では、

$$P(\mathrm{I}|\mathrm{S}_k) = \sum_{k'} P(k'|k) I_{k'}$$

と書ける* ので SIS モデルは

$$\dot{I}_k = k\lambda S_k \left(\sum_{k'} P(k'|k) I_{k'} \right) - I_k$$

となる。

*引き続き状態の相関は無視する。実はここで他の色々な相関も無視している。

次数相関

演習

次数相関ありモデルにおいて、相関なしモデルを参考にして以下を示せ。

1. $(I_1, \cdots, I_N) = (0, \cdots, 0)$ での Jacobian が $\lambda A - E_N$、ただし
$$A = (a_{kk'}) = (kP(k'|k))$$
と書けることを示せ。
2. A の実部最大固有値を ρ とするとき、感染閾値が
$$\lambda^* = \frac{1}{\rho}$$
であることを示せ。

ネットワーク上の進化ゲーム

協力の進化

協力行動の進化を考える。

協力 (C; Cooperation) コスト c を払い相手に利益 b を与える
非協力 (D; Defection) 何もしない

集団内における協力者、非協力者の頻度を x_{C}、x_{D} とおく。

完全混合集団では、両者の平均利得は

$$F_{\mathrm{C}} = bx_{\mathrm{C}} - c$$
$$F_{\mathrm{D}} = bx_{\mathrm{C}}$$

$\Rightarrow$ 常に $F_{\mathrm{C}} < F_{\mathrm{D}}$ であるから協力は進化しない。

ネットワーク上の協力の進化

ネットワークとして次数 k の正則グラフを考え、以下のルールを仮定する。

- 各頂点には C もしくは D の個体が一個体だけいる。
- 辺を通してつながる相手全てとゲームを一回ずつプレイし、利得を得る。
- 辺を通して子が生まれる。

特に以下の"Death-Birth model"を考える。

"Death-birth model"

1. 集団中の一個体がランダムに死亡する。
2. 空き地を巡って周囲の k 人の近傍個体が競争する。
   利得 F に対し、妊性 $1 + wF$ に比例した確率で誰かが空き地に子を産む。

シミュレーションによると協力は進化し得る。⇒ 解析的な方法論は？

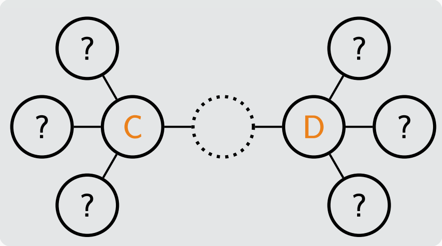
ネットワーク上の協力の進化

そこで平均場近似をして考える。

空き地をまたいで隣接する C と D の利得の大小を比べると良いことが分かる。

C の近傍：

- 一人は空き地。そこには C か D がいた。
- 残り $(k-1)$ 人のそれぞれは、
  確率 x_{C} で協力者、x_{D} で非協力者。



D の近傍：

- 一人は空き地。そこには C か D がいた。
- 残り $(k-1)$ 人のそれぞれは、
  確率 x_{C} で協力者、x_{D} で非協力者。

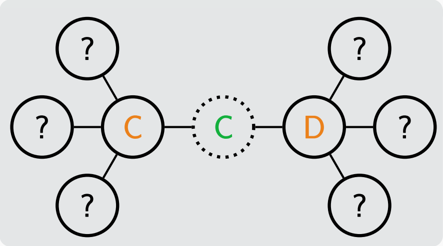
ネットワーク上の協力の進化

空き地をまたいで隣接する C と D の利得を計算する。

空き地に C がいたとすると、

$$F_{\mathrm{C}} = [1 + (k-1)x_{\mathrm{C}}]\,b - kc$$
$$F_{\mathrm{D}} = [1 + (k-1)x_{\mathrm{C}}]\,b$$

よって $F_{\mathrm{C}} < F_{\mathrm{D}}$ である。



空き地に D がいたとしても、上の 1 が 0 に変わるだけで結論は変わらない。
⇒協力は進化しない（？！）

状態相関

- 子は毎回親の隣に生まれる。
- よって、隣接する頂点間では状態（C もしくは D）が正の相関をするはず。
- しかし平均場近似はこれを<u>無視</u>している。

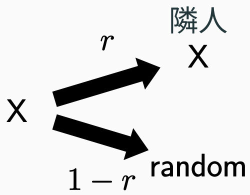
解決策：隣接する頂点間での状態の相関を考える必要がある。

ヒューリスティックス

$0 \leq r \leq 1$ なるパラメータ r があって、

- 確率 r で、X（=C or D）の隣人は X である。
- 確率 $1-r$ で、X の隣人は集団からのランダムサンプルである。

とみなせたとする。



このような（都合の良い）r が存在したとしたら、利得の計算は以下のようになる。

ヒューリスティックス

C の近傍：

- 一人は空き地。そこには C か D がいた。
- 残り $(k-1)$ 人は、確率 $\underline{r+(1-r)x_{\mathrm{C}}}$ で協力者、$\underline{(1-r)x_{\mathrm{D}}}$ で非協力者。

D の近傍：

- 一人は空き地。そこには C か D がいた。
- 残り $(k-1)$ 人は、確率 $\underline{(1-r)x_{\mathrm{C}}}$ で協力者、$\underline{r+(1-r)x_{\mathrm{D}}}$ で非協力者。

利得：

$$F_{\mathrm{C}} = [(0 \text{ or } 1) + (k-1)\{r + (1-r)x_{\mathrm{C}}\}]\,b - kc$$
$$F_{\mathrm{D}} = [(0 \text{ or } 1) + (k-1)\{\qquad (1-r)x_{\mathrm{C}}\}]\,b$$

協力の進化条件：$F_{\mathrm{C}} > F_{\mathrm{D}} \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)rb > kc$

ペア頻度

隣接する頂点の状態の相関 ⇒ モデルの仮定から決まる。

そこで集団にはどのようなペアが存在するかを考えよう。

(CC, CD, DC, DD) ペアの数をそれぞれ $(N_{\mathrm{CC}}, N_{\mathrm{CD}}, N_{\mathrm{DC}}, N_{\mathrm{DD}})$ とおく。
ただしペアは両側から 1 回ずつ数えると約束する*。

集団内のペアの総数： $N_{\mathsf{pair}} = kN_{\mathsf{indv}}$

*ここではそうすることにするが、別にそうしなくても良い。

ペア頻度

よってペア頻度 (pair frequency) が以下のように定まる：

$$(x_{\mathrm{CC}}, x_{\mathrm{CD}}, x_{\mathrm{DC}}, x_{\mathrm{DD}}) = \left(\frac{N_{\mathrm{CC}}}{N_{\text{pair}}}, \frac{N_{\mathrm{CD}}}{N_{\text{pair}}}, \frac{N_{\mathrm{DC}}}{N_{\text{pair}}}, \frac{N_{\mathrm{DD}}}{N_{\text{pair}}}\right)$$

4 変数だが、以下の 2 つの制約式があるので、モデルの自由度は 2。

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{CC}} + x_{\mathrm{CD}} + x_{\mathrm{DC}} + x_{\mathrm{DD}} &= 1 && \text{(ペア頻度の和)} \\ x_{\mathrm{CD}} &= x_{\mathrm{DC}} && \text{(CD ペア)} \end{aligned}$$

大域頻度と局所頻度

ペア頻度 $(x_{\mathrm{CC}}, x_{\mathrm{CD}}, x_{\mathrm{DC}}, x_{\mathrm{DD}})$ の代わりに、

- 大域頻度 (global frequency)：$(x_{\mathrm{C}}, x_{\mathrm{D}})$
- 局所頻度 (local frequency)：$(x_{\mathrm{C|C}}, x_{\mathrm{C|D}}, x_{\mathrm{D|C}}, x_{\mathrm{D|D}})$

で記述することもできる。それぞれ以下のように定義する。

$$x_{\mathrm{X}} := x_{\mathrm{XC}} + x_{\mathrm{XD}} \quad (\mathrm{X} = \mathrm{C}, \mathrm{D})$$

$$x_{\mathrm{X|Y}} := \frac{x_{\mathrm{XY}}}{x_{\mathrm{Y}}} \quad (\mathrm{X}, \mathrm{Y} = \mathrm{C}, \mathrm{D})$$

ここで局所頻度 $x_{\mathrm{X|Y}}$ は「隣に Y がいるという条件の下で、ある頂点の状態が X である」という条件付き確率であり、Y の近傍の状態分布を表現している。

大域頻度と局所頻度

計 6 変数あるが、以下の 4 制約があるので、自由度はやはり 2 である：

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{C}} + x_{\mathrm{D}} &= 1 && \text{(大域頻度の和)} \\
x_{\mathrm{C|C}} + x_{\mathrm{D|C}} &= 1 && \text{(C の周りの局所頻度の和)} \\
x_{\mathrm{C|D}} + x_{\mathrm{D|D}} &= 1 && \text{(D の周りの局所頻度の和)} \\
x_{\mathrm{C}} x_{\mathrm{D|C}} &= x_{\mathrm{D}} x_{\mathrm{C|D}} && \text{(CD ペアの頻度の表現)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ よって、変数 x_{C} と $x_{\mathrm{C|C}}$ の時間変化さえ分かれば十分。

局所頻度の発展方程式

利得 F の、妊性 $1 + wF$ への貢献が非常に小さい極限を考える ($0 < w \ll 1$)。
x_{C} の変化速度は $O(w)$。一方で $x_{\mathrm{C|C}}$ の変化速度は（以下に示すように）$O(1)$。

よって、$x_{\mathrm{C|C}}$ の微分方程式を導く際には近似的に $w \simeq 0$ と仮定して良く、
またその際は x_{C} は定数であると仮定して良い（「時間スケール分離」の仮定）。

$w = 0$ とした Death-birth model

1. 集団から一個体がランダムに死亡する。
2. 近傍 k 人のうちのランダムな一人が空き地に子を産む。

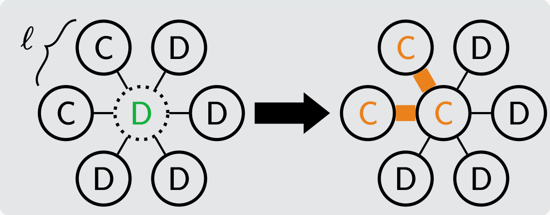
このモデルは投票者モデル (voter model) と呼ばれている*。

*逆に言うと、$w > 0$ の Death-birth model は"偏りのある投票者モデル (biased voter model)"と呼ぶこともできる。

局所頻度の発展方程式

CC ペアの数は以下の時に増加する。

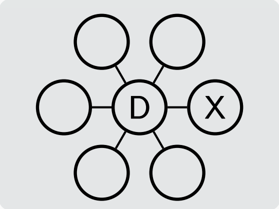
- D が死亡し、C が子を産む。
- 死亡した D の周りにいた C の数を ℓ とすると、CC ペアが 2ℓ 個増加。



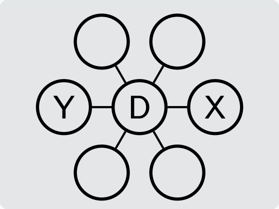
⇒ D の近傍の C の人数 ℓ とする。ℓ の分布は何だろうか？

ペア近似法 (pair approximation method)

X の状態は、第１近傍（＝隣）が D であるという条件下での条件付き確率 $x_{\mathrm{X|D}}$ で表される。



Y の状態は、第１近傍が D、第２近傍（＝隣の隣）が X であるという条件下での条件付き確率 $x_{\mathrm{Y|DX}}$ で表される。
⇒ X と Y は独立ではない（！）
⇒ そこで第２近傍の影響を無視し、$x_{\mathrm{Y|DX}} \approx x_{\mathrm{Y|D}}$ と近似。



このように $x_{\mathrm{X|YZ}} \approx x_{\mathrm{X|Y}}$ と近似する方法をペア近似法と呼ぶ。

局所頻度の発展方程式

ペア近似の下で、D の近傍の C の人数 ℓ は二項分布 $\mathrm{Binomial}(k, x_{\mathrm{C|D}})$ に従う。

C 近傍の数が ℓ の時、死亡した D が C によって置き換えられる確率は ℓ/k。
$\Rightarrow$ この時 CC ペアが 2ℓ 個増加。

よって

$$
\begin{aligned}
\Delta N_{\mathrm{CC}} &= \underbrace{x_{\mathrm{D}}}_{\text{D の死亡}} \sum_{\ell=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{\ell} x_{\mathrm{C|D}}^{\ell} x_{\mathrm{D|D}}^{k-\ell}}_{\text{近傍に C が } \ell \text{ 人}} \underbrace{\frac{\ell}{k}}_{\text{D}\to\text{C の確率}} \underbrace{2\ell}_{\text{増分}} \\
&= \frac{2x_{\mathrm{D}}}{k} \sum_{\ell=0}^{k} \left[\binom{k}{\ell} x_{\mathrm{C|D}}^{\ell} x_{\mathrm{D|D}}^{k-\ell} \right] \ell^2 \\
&= \frac{2x_{\mathrm{D}}}{k} \{ k x_{\mathrm{C|D}} + k(k-1) x_{\mathrm{C|D}}^2 \} \qquad \text{（二項分布の 2 次モーメントの公式）} \\
&= 2x_{\mathrm{CD}} \{ 1 + (k-1) x_{\mathrm{C|D}} \}
\end{aligned}
$$

局所頻度の発展方程式

減少分も考えることで、最終的に以下の式を得る。

$$\dot{x}_{\mathrm{CC}} = \frac{2x_{\mathrm{CD}}}{N_{\textsf{pair}}}\{1 + (k-1)(x_{\mathrm{C|D}} - x_{\mathrm{C|C}})\}$$

演習

上を示せ。

$w \simeq 0$ の下で、大域頻度 x_{C} の変化は非常に遅く、定数とみなして良いから

$$\dot{x}_{\mathrm{C|C}} = \frac{\dot{x}_{\mathrm{CC}}}{x_{\mathrm{C}}} = \frac{2x_{\mathrm{CD}}}{N_{\textsf{pair}}x_{\mathrm{C}}}\{1 + (k-1)(x_{\mathrm{C|D}} - x_{\mathrm{C|C}})\}$$

を得る。よって（上の中括弧 $= 0$）となるまで $x_{\mathrm{C|C}}$ は変化する。

局所頻度の発展方程式

2 変数 $(x_{\mathrm{C}}, x_{\mathrm{C|C}})$ の閉じた式を得るために

$$x_{\mathrm{C|D}} = \frac{x_{\mathrm{D|C}} x_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{D}}} = \frac{(1 - x_{\mathrm{C|C}}) x_{\mathrm{C}}}{1 - x_{\mathrm{C}}}$$

なる変形をし、（中括弧 $= 0$）を解く。計算の結果、最終的に準定常状態

$$x^*_{\mathrm{C|C}} = \frac{1}{k-1} + \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) x_{\mathrm{C}}$$

を得る。

演習

上を示せ。

局所頻度の発展方程式

さらに次も分かる：

$$
\begin{aligned}
x^*_{\mathrm{C|C}} &= \frac{1}{k-1} && + \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) x_{\mathrm{C}} \\
x^*_{\mathrm{D|C}} &= 0 && + \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) x_{\mathrm{D}} \\
x^*_{\mathrm{C|D}} &= 0 && + \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) x_{\mathrm{C}} \\
x^*_{\mathrm{D|D}} &= \frac{1}{k-1} && + \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) x_{\mathrm{D}}
\end{aligned}
$$

これは先程のヒューリスティックスが $r = \frac{1}{k-1}$ で成り立つ（！）ことを意味するから、先程導いた条件式に代入し、以下を得る。

次数 k の正則グラフ上の協力の進化条件：$b > kc$

状態相関

r の正体：

- 隣接頂点間の状態の相関係数である。
- 血縁度 (relatedness) である。
  - すなわち、隣接頂点の個体が共通祖先を持つ確率である。
- さらに、これは次数 k の Bethe lattice（Cayley tree とも呼ばれる）* における、隣接する二頂点からそれぞれスタートした random walker の衝突確率でもある。
  - これは集団遺伝学の coalescent 確率を求めることに対応している。

---

*次数 k でループのない無限の大きさの正則グラフのこと

ペア近似の精度

ペア近似は、ネットワークにループがないことを暗黙に仮定している。

一般に短いループがある時、その誤差は大きくなると予測される。

しかしながら弱選択極限（$w \ll 1$）においては協力の進化則 $b > kc$ は、ループを持つ格子やその他正則グラフにおいても当てはまりが非常に良いことが分かっている。

まとめ

まとめ

- SIS モデルを用いて、次数に分布がある場合のネットワーク上の感染症動態の導出法を解説した。
- 進化ゲームモデルを用いて、隣接する頂点間の状態相関を表現する手法である、ペア近似法を解説した。

参考文献

ネットワーク上の感染症動態

- Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2001). “Epidemic spreading in scale-free networks.” *Physical review letters*, **86(14)**, 3200.
- Boguná, M., Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2003). “Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations.” *Physical review letters*, **90(2)**, 028701.

ネットワーク上の進化ゲーム

- Ohtsuki, H., Hauert, C., Lieberman, E., & Nowak, M. A. (2006). “A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks.” *Nature*, **441(7092)**, 502-505.